

# Určování gravitační konstanty

Doc. ing. Ivan Štoll, CSc.

katedra fyziky jaderné a fyzikálně inženýrské fakulty ČVUT

Rozměry zeměkoule byly známy již starým Řekům. Ředitel alexandrijského Museia Eratosthenés již ve 3. století př. n. l. určil rozdíl ve výšce Slunce nad obzorem v témž okamžiku ve dvou místech na témž poledníku (v Alexandrii a Syeně, dnešním Asuánu) a ze známé vzdálenosti obou míst stanovil délku poledníku na 252 000 stadií. Nevíme sice jakých stadií používal, ale pokud šlo o egyptská stadia (157,7 m), dostal hodnotu 39 690 km, tedy velmi blízkou skutečné. Ještě přesnější hodnoty pak určili arabští hvězdáři (al-Battání, 850 - 929). Může se proto zdát podivné, že Kolumbus neměl vlastně zdání o skutečných rozměrech zeměkoule a nedokázal si vypočítat, jak daleko je z Evropy do Japonska směrem západním.

Jiná situace byla ovšem s určením hmotnosti zeměkoule (a dalších nebeských těles). Sám pojem hmotnosti a tíhy byl aplikován jen na tělesa na zemském povrchu a chápán intuitivně. Ještě Kepler se domníval, že síly působící mezi nebeskými tělesy jsou magnetického původu a s koncepcí všeobecné gravitace přišel jak známo teprve Newton (1687). Tehdy také poprvé nabyla smyslu otázka, jaká je hmotnost Země. Newton jasně rozlišil hmotnost setrvačnou,  $m_s$ , vystupující v zákonu síly a udávající velikost setrvačné (například odstředivé) síly:

$$F = m_s a, \quad F_o = m_s r \omega^2$$

a hmotnost gravitační  $m_g$  figurující v jeho slavném gravitačním zákonu

$$F = G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r^2}$$

Pokud by si tyto hmotnosti byly úměrné (a skutečnost, že všechna tělesa padají ve vakuu s týmž zrychlením tomu nasvědčuje), bylo by možno volbou gravitační konstanty  $G$  je učinit číselně rovnými. Znamenalo

by to, že v každém tělese, bez ohledu na to z jakého je materiálu, je poměr setrvačné a gravitační hmotnosti týž. Toto tvrzení se nazývá principem ekvivalence, je předmětem stále přesnějšího experimentálního ověřování a je na něm založena obecná teorie relativity. Jsou-li si setrvačná a gravitační hmotnost rovny, potom na těleso na povrchu Země působí jednak gravitační a jednak odstředivá síla a z pohybové rovnice dostáváme

$$m_s \vec{a} = m_g \vec{a}_g + m_s \vec{a}_o$$

a vykrátíme-li hmotnosti, dostaneme

$$\vec{a} = \vec{a}_g + \vec{a}_o = \vec{g}$$

neboli známé tíhové zrychlení.

V dalším nebudeme činit rozdíl mezi velikostí tíhového a gravitačního zrychlení, tj. budeme zanedbávat zemskou rotaci. Místo obvykle používané hodnoty normálního zrychlení budeme však používat hodnotu tíhového zrychlení na pólu, kde se zemská rotace neuplatňuje, tj.  $g=9,832 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Zemi budeme přitom považovat za kulovou, což ovšem vnáší do vztahu mezi gravitační konstantou a hmotností Země určitou nepřesnost. Na druhé straně určit gravitační zrychlení vně geoidu je velmi obtížné. Z gravitačního zákona tedy najdeme

$$g = G \frac{M_Z}{R_Z^2}, \quad G M_Z = g R_Z^2,$$

kde  $M_Z, R_Z$  jsou hmotnost a poloměr Země. Tak můžeme snadno určit součin gravitační konstanty a hmotnosti Země.

Pokud zkoumáme pohyby těles na zemském povrchu, nemusíme hodnotu gravitační konstanty znát - přitažlivá síla Země je dána tíhovým zrychlením a gravitační síly mezi těmito tělesy navzájem jsou zanedbatelně malé. Při určování hmotnosti

nebeských těles a studiu vlastností vesmíru se ovšem bez gravitační konstanty neobejdeme. Protože však nemáme teorii, z níž by se dala gravitační konstanta vypočítat, nezbyvá než změřit ji experimentálně.

Protože známe součin gravitační konstanty a hmotnosti Země, určit experimentálně gravitační konstantu vlastně znamená zvážit Zemi. Zemi můžeme považovat v prvním přiblížení za kulově symetrickou; přitom může být tvořena koncentrickými kulovými vrstvami různé hustoty. Odhadnout můžeme hustotu povrchových vrstev Země ( $2000\text{--}3000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ). Jak dnes víme, má střední část Země hustotu přibližně rovnou hustotě železa a niklu ( $7000\text{--}8000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ), takže můžeme předpokládat, že střední hustota Země bude  $5000\text{--}6000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Naopak změříme-li střední hustotu Země, můžeme odtud vyvozovat vlastnosti a složení vnitřních vrstev. Mezi gravitační konstantou a střední hustotou Země  $\rho_s$  platí zřejmý vztah

$$G = \frac{3g}{4\pi R_Z \rho_s} = \frac{3,680 \cdot 10^{-7}}{\rho_s}$$

Ani moderní experimentální metody neumožňují zjistit gravitační konstantu přesněji než na čtyři platné číslice, tj. asi na setinu procenta (na rozdíl třeba od rychlosti světla, kterou známe s milionkrát větší přesností). Bereme ji rovnu  $G=6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$  (dále budeme uvádět jen jednotky SI). Tomu odpovídá střední hustota Země  $5\,516 \text{ SI}$ .

Newton ještě s gravitační konstantou nepracoval a střední hustotu Země mohl jen zhruba odhadovat. První pokusy s určením gravitační konstanty byly založeny na měření síly, kterou působí velká hmotnost osamělé hory nebo geologických vrstev; tuto hmotnost bylo ovšem třeba odhadnout z objemu a hustoty. Poprvé se o to pokusil francouzský matematik a fyzik Pierre Bouguer (1698 - 1758). Bouguer je znám jako vynálezce pyrometru, fotometru,



Henry Cavendish (1731 - 1810)

heliometru, dále svými měřeními změň hustoty a refrakce světla v atmosféře. Ve třicátých letech 18. století se zúčastnil francouzské výpravy, která měla za úkol změřit v Peru (v blízkosti rovníku) délku poledníkového stupně. V roce 1738 se Bouguer pokusil odhadnout hmotnost osamělé kuželovité sopky Chimboraza a zjistit, jak se na jejím úpatí odchyluje olovnice od svislého směru (asi o 7 úhlových vteřin).

Přesnější úhlová měření provedli roku 1774 ve Skotsku anglický astronom a ředitel Greenwichské hvězdárny Nevil Maskelyne (1732 - 1811) a matematik a vojenský inženýr, tajemník Londýnské Královské společnosti Charles Hutton (1737 - 1823). Měřili totiž rozdíl výšky hvězdy zjišťované přístrojem nivelovaným na jižním a severním svahu hory Shehallien v hrabství Perthském. Hmotnost hory musela ovlivnit náklon výchozí roviny. Maskelyne a Hutton dostali hodnoty odpovídající  $G=8,18 \cdot 10^{-11}$  SI,  $\rho_s=4500$  SI. Měření tímto způsobem probíhala i v 19. století (anglický geodet Henry James (1803 - 1877) v r. 1856 aj.)

Pozdější pokusy byly založeny na určování délky sekundového kyvadla buď na vrcholcích hor nebo v šachtách hluboko pod zemí.

Určování gravitační konstanty

Hmotnost geologických útvarů a vrstev musí ovlivnit gravitační zrychlení ve své blízkosti, a tedy i dobu kyvu kyvadla. Tak italský astronom Francesco Carlini (1783 - 1862) z Milána prováděl v roce 1824 měření na hoře Mt. Cenis a odhadl střední hustotu Zeměna 4 390 SI. Později byla prováděna podobná měření na japonské Fudžijamě a havajské Mauna Kea.

Pokusy s kyvadlovými hodinami pod zemí prováděl poprvé známý anglický astronom George Biddel Airy (1801 - 1892). Sledoval jejich chodv dole Harton Colliery ve Walesu v hloubce 383 m. Dospěl přitom k hodnotě  $G=5,61 \cdot 10^{-11}$  SI,  $\rho_s=6560$  SI. Je zajímavé, že i u nás probíhaly v minulém století podobné pokusy. Významný rakouský geodet Robert Doudlebský ze šlechtického rodu Šternberků, který se podílel na triangulaci Čech, používal kyvadlové hodiny k určování tíže na šachtě sv. Vojtěcha v Příbrami v hloubkách 561 m a 972 m. Po významném botanikovi a Goethovu příteli Kašparovi ze Šternberka je to další významný přírodovědec z tohoto šlechtického rodu.

Z uvedených údajů vidíme, že výsledky měření založených na odhadu hmotnosti a vlivu rozlehlých

$$M = \frac{\pi}{2} \mu \frac{r^4}{l} \varphi = D \varphi.$$

přírodních útvarů jsou zatíženy velkou chybou a pro přesná fyzikální a astronomická použití nevhodná. Bylo proto třeba přejít z terénu do fyzikál-

ni laboratoře a pokusit se změřit přitažlivost dvou těles (nejlépe koulí, které se navenek chovají jako hmotné body) o přesně známé hmotnosti. I když tato přitažlivá síla, která působí i mezi dvěma lidskými bytostmi nezávisle na pohlaví, je velmi malá, lze ji přesto experimentálně změřit. Přesný přístroj umožňující měřit sebeslabší síly se nazývá torzní váhy.

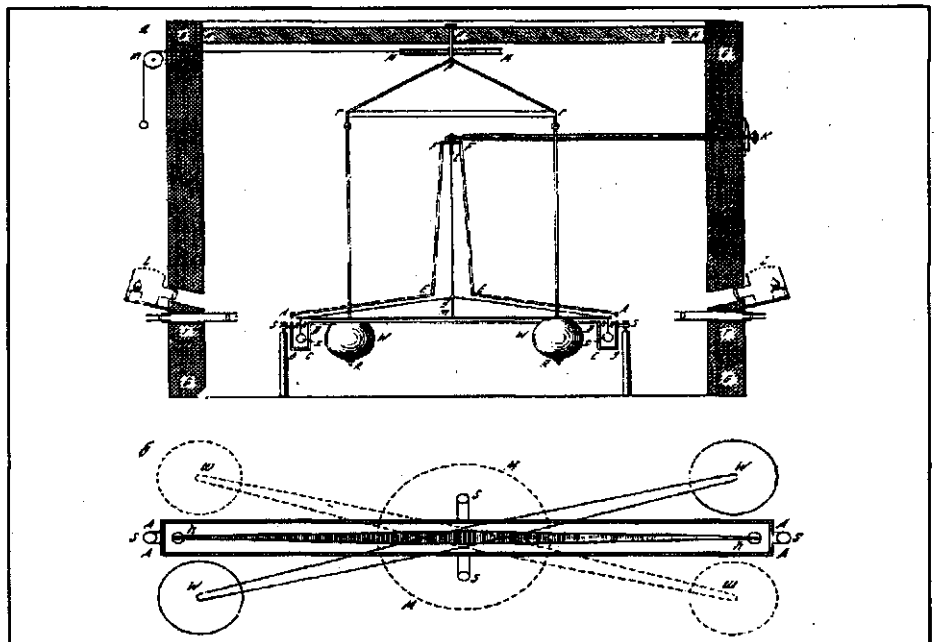
Vynález torzních vah je spojován se jménem Charlese Augusta Coulomba (1736 - 1806), který s jejich pomocí našel v roce 1785 známý Coulombův zákon pro elektrostatické a magnetické síly. Coulomb se po dlouhou dobu zabýval výzkumem torzních vlastností různých druhů vláken a drátků a experimentálně našel zákon udávající vztah mezi momentem silové dvojice  $M$ , který působí zkrut na konci vlákna délky  $l$  a úhlem  $\varphi$ , o který se vlákno zkrutí:

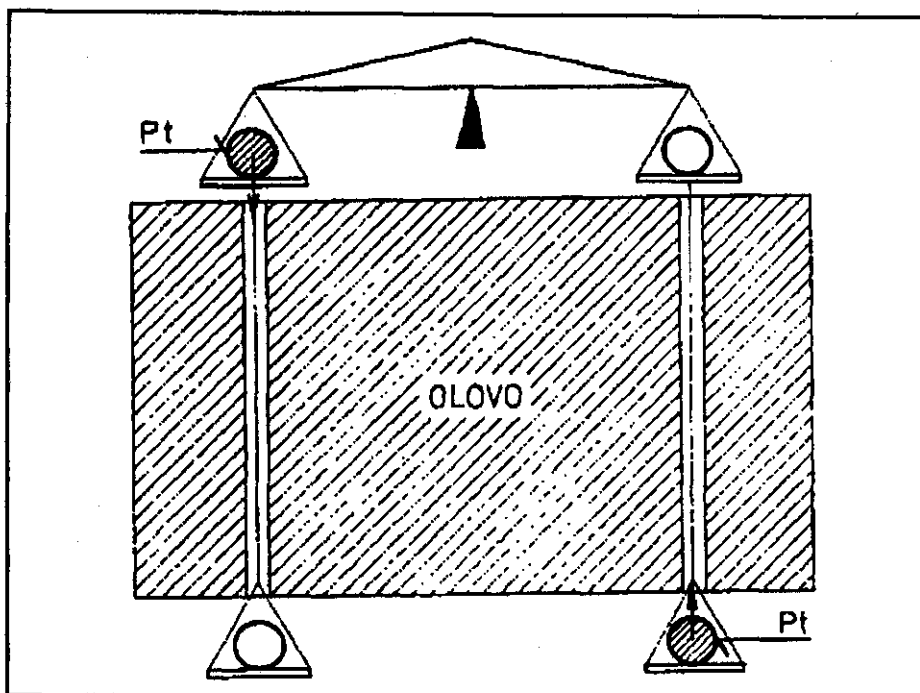
Jako  $\mu$  jsme označili modul smyku materiálu vlákna a  $r$  poloměr vlákna, konstantu  $D$  nazýváme direkční moment.

Zavěsíme-li tedy na konec dlouhého tenkého vlákna dlouhé lehké vahadlo, stačí zakroutit konce vahadla nepatrnými silami a měřit úhel zkrutu. Neobyčejná je citlivost vůči poloměru vlákna - zmenšíme-li jeho poloměr o jeden řád, klesne potřebná síla o čtyři řády.

Přesnost Coulombových měření elektrostatických sil nebyla velká. Coulomb ostatně prováděl nikoli

Uspořádání Cavendishova experimentu s torzními váhami.





Uspořádání Cavendishova experimentu Richarze a Krigar-Menzela

absolutní, ale pouze relativní měření. Neurčoval hodnotu nějaké fyzikální konstanty, ale chtěl pouze dokázat, že síly klesají nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti. Myšlenku použít torzní váhy k měření gravitační konstanty pojal zřejmě jako první anglický geolog a astronom John Michell (1724 - 1793). Zdá se dokonce, že Michell vynalezl torzní váhy nezávisle na Coulombovi. Michell byl vůbec neobyčejně pronikavý duch. Jako první uvažoval například o možném vlivu gravitace na rychlost a směr světelných paprsků, kladl si otázku, zda světlo vycházející z hmotných hvězd nemá rychlost menší a zda se nemůže stát, že neobyčejně hmotná hvězda vůbec nedovolí světelnému paprsku opustit její povrch!

Michell byl jedním z mála blízkých přátel Henryho Cavendise (1731 - 1810), jednoho z největších experimentálních fyziků všech dob. Cavendish pocházel ze šlechtického rodu a zdědil značné jmění od indické větve svého příbuzenstva. To mu umožnilo vést nezávislý život a věnovat se plně chemickým a fyzikálním pokusům (je znám jako objevitel vodíku). Z Cavendishova dědictví byla později po jeho smrti financována známá Cavendishova laboratoř v Cambridgi. Jinak byl Cavendish znám svou uzavřenou a trochu podivínskou povahou, která ovšem souvisela s obrovskou duševní koncentrací na vědecké problémy.

Cavendish s Michellem tedy začali plánovat experiment ke změření gravitační konstanty pomocí torzních vah. Než k němu však mohlo dojít, Michell umírá. Cavendish pak Michellovu aparaturu dále zdokonalil a rozpracoval neuvěřitelně precizní metodiku experimentu vlastně poprvé v historii určeného ke zjištění absolutní velikosti fyzikální konstanty. Vlastní měření provedl v roce 1797 a v následujícím roce jeho výsledky publikoval v pojednáních Královské společnosti pod názvem "Experiments to determine the density of the Earth".

Cavendishovy torzní váhy vidíme na obrázku. Na tenkém stříbrném drátku je zavěšena lehká, ale dostatečně pevná vodorovná tyčinka z jedlového dřeva a na jejích koncích dvě malé olověné koule o hmotnosti 730 g. Další dvě těžké olověné koule (158 kg každá) jsou upevněny na měděných tyčích a mohou zaujímat dvě protichůdné polohy vzhledem k vahadlu, tj. mohou působit momenty opačného směru a gravitačním působením vahadlo s kuličkami rozkmitat. Vahadlo s malými kuličkami je přitom umístěno ve zvláštním pouzdře, aby se nemohlo uplatnit proudění vzduchu. Polohu vahadla bylo možno registrovat na osvětlené stupnici s velmi jemným dělením.

Hlavní problém byl v tom, že Cavendish potřeboval znát koeficient úměrnosti mezi momentem působících sil a výsledným úhlem

zkrutu, tedy direkční moment. Tento koeficient ovšem závisí kromě číselných konstant na obtížně měřitelném poloměru drátku a na modulu smyku materiálu. Cavendish se proto rozhodl určit tento koeficient experimentálně. Vahadlo rozkmital a porovnával periodu jeho torzních

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

kmitů (byla dlouhá, kolem 15 minut, s jiným drátkem kolem 7 minut) s periodou sekundového kyvadla, která závisí jen na tíhovém zrychlení a délce kyvadla.

Cavendish své pokusy popsal tak detailně, že je možno je přesně zreprodukovat. Ověřoval všechny možné vlivy, které by mohly vyvolat nepřesnost. Vyloučil možný gravitační vliv měděných tyčí, zkoumal, zda při náhradě měděných tyčí železnými se nemohou uplatnit magnetické síly, ověřoval možné účinky vibrací, nepružné vlastnosti závěsu, kompenzoval teplotní rozdíly uvnitř a vně pouzdra s vahadlem. Musíme si uvědomit, že tak citlivá aparatura reagovala na sebenepatrnější vlivy, vahadlo bylo vlastně neustále v pomalém pohybu a bylo třeba přesně vymezit, která část tohoto pohybu je skutečně způsobena gravitačními silami.

Cavendish provedl celkem 17 sérií pokusů (29 měření) a určil střední hodnotu hustoty Země jako 5450 SI, což odpovídá velikosti gravitační konstanty  $G=6,75 \cdot 10^{-11}$  SI. Stačí porovnat tento výsledek s dnešními hodnotami, abychom získali úctu ke Cavendishovu experimentátorskému mistrovství. Přitom se Cavendish vyjadřoval o svém výsledku velmi skromně a uváděl, že jeho výsledky Maskelyn a Hutton dostali pro střední hustotu Země hodnotu dosti nižší (4 500 SI) a připouštěl, že jeho výsledek nemusí být správnější.

V průběhu 19. a začátkem 20. století řada experimentátorů Cavendishova měření opakovala s větší přesností. Uvedeme jen stručně číselnou část jimi naměřené hodnoty G. Anglický hvězdář Francis Baily (1774 - 1844) v roce 1843 dostal 6,49, Reich roku 1852 6,60, známý francouzský fyzik Alfred Marie Cornu (1841 - 1873) spolu s Baillym použili duté železné koule naplněné rtutí (kterou bylo možno přečerpávat)

a v roce 1878 naměřili hodnotu 6,66. Boys se zlatými kuličkami a křemenným vláknem naměřil roku 1895 6,658, Braun, který umístil celou aparaturu do vakua, v roce 1896 rovněž 6,658, známý maďarský fyzik Eötvös roku 1896 6,65, Burgess roku 1902 6,63, Crémieu roku 1909 6,673.

Byly vyzkoušeny i jiné možné experimentální metody. Tak německý fyzik Jolly, učitel Maxe Plancka, měřil v letech 1879 - 1880 v Mnichově dvouramenými váhami rozdíl tíhových sil působících na olovenou kouli o hmotnosti 1 kg umístěné jednou nad a po druhé pod těžkou olovenou koulí o hmotnosti 1 000 kg. Rozdíl činil 0,15 mg a Jolly tak zjistil hodnotu  $G$  6,47. Podobná měření prováděl i Poynting (1878 a 1891) a dostal hodnotu 6,698. Richarz a Krigar-Menzel prováděli v letech 1884 - 1898 v Berlíně měření s kilogramovými platinovými koulemi váženými nad a pod masivním blokem z olovených cihel o hmotnosti 100 tun. Aby kompenzovali vztlak vzduchu používali duté platinové koule stejné velikosti. Uspořádání metody je patrné z obrázku. Touto metodou dospěli k číselné hodnotě 6,685 a přesnost udali na 0,16 procenta. Wilsing použil v roce 1889 takzvané diferenciální kyvadlo. Je to fyzické kyvadlo, jehož osa prochází těsně nad těžištěm a které má tedy dlouhou dobu kyvu. Rovnovážná poloha kyvadla byla přitom ovlivňována těžkými olovenými bloky. Dostal pro  $G$  číselnou hodnotu 6,60.

Jak vidíme, všechna tato měření dávala blízké hodnoty gravitační konstanty, i když se nedařilo podstatněji zvýšit její přesnost. Fyzikové věnovali tomuto úkolu značnou pozornost - koncem minulého století ostatně panovalo přesvědčení, že ve fyzice už stejně není co zkoumat a zbývá jen zpřesňovat známé konstanty. Touto argumentací například Jolly odrazil Plancka od studia fyziky. Víme jak to dopadlo - začátkem našeho století se zrodila kvantová a relativistická fyzika a celý náš pohled na přírodu. Měření gravitační konstanty, tak důležité v obecné teorii relativity a astrofyzice, pokračovala. Nic lepšího než torzní váhy sice nemáme, ale přesnost měření se podařilo zvýšit alespoň o jeden řád dynamickou metodou sledování torzních kmitů.

Zakroutime-li vlákno torzních vah

a opět uvolníme, začne soustava vykonávat torzní kmity. Jejich perioda závisí na momentu setrvačnosti vahadla se závažími  $I$  a na direkčním momentu vah:

a může trvat desítky minut. Přítomnost gravitujících hmot se projevuje jako přídavný direkční moment, který vyvolá malou změnu periody torzních kmitů. Z této změny můžeme pak určit velikost gravitační síly se značnou přesností. Metodu navrhol už v roce 1895 Boys a realizoval ji v našem století například Heyl (1928), který dostal číselnou hodnotu  $G$  rovnou 6,672 1 s přesností 0,1 procenta. Nejpresnější měření gravitační konstanty však provedli v roce 1981

Luther a Towler z amerického Národního úřadu pro standardy (NBS). Jejich hodnota  $G=6,6726 \cdot 10^{-11}$  SI má udanou přesnost 0,0075 procenta. Luther a Towler využili všech prostředků moderní experimentální techniky. Vahadlo jejich aparatury bylo tvořeno tenkou wolframovou tyčinkou o průměru 1 mm a délce 28,5 mm, která spojovala dva wolframové válečky průměru 7,1 mm a výšky 2,5 mm. Vahadlo bylo zavěšeno na křemenném vlákně průměru 10 mikrometrů a délky 40 cm. Celý systém byl umístěn v evakuovaném kontejneru, k detekci sloužilo 1 024 fotodiod a on-line počítačové vyhodnocování.

Přes tyto vymoženosti zůstává gravitační konstanta jednou z nejméně přesně známých přírodních konstant; dokonce existují i úvahy o tom, zda se během vývoje vesmíru nemění. Přitom patří k nejdůležitějším. Gravitace, o jejíž podstatě víme stále poměrně málo, je jediná skutečně univerzální síla v přírodě, která působí na všechny částice a tělesa bez rozdílu, a dá se říci, že drží vesmír pohromadě. Její zkoumání, zejména na kvantové úrovni, je dnes jednou z nejexponovanějších oblastí výzkumu teoretické fyziky a astrofyziky.

**Co Vás čeká v příštím čísle? Dozvíte se, co nového o Slunci nám přinesla sonda Ulysses, podíváte se do Mare Tranquillitatis na Měsíci, dozvíte se něco o Herbig-Haro objektech, samozřejmě bude pokračování eferidy komety Hale-Bopp a mnoho dalších zajímavých článků.**

Koupím zachovalý kovový námořní sextant za rozumnou cenu. Sháním také jakékoliv knihy v češtině, ruštině a angličtině o sférické astronomii, geodetické a praktické astronomii, astronavigaci, slunečních hodinách atd.

Adresa: Jan Šafář, Šantrochova 424, 500 11 Hradec Králové, telefon: 049/453 84.

## Dovolená s dalekohledem 96

se koná od 18. do 25. srpna 1996 v zařízení letního tábora ve Zhořci u Nečtin (okres Plzeň - sever).

Tato akce je určena majitelům amatérské astronomické techniky (dalekohled je tedy pro účast podmínkou). Smyslem je umožnit zajemcům společný pobyt pod oblohou. Možnost účasti rodinných příslušníků pak přináší naději, že rodina v tomto případě "nedoplatí" na naročného komička, ale naopak bude mít možnost seznámit se s astronomií blíže, podívat se na oblohu dalekohledem a navíc strávit 7 prázdninových dní v krásném prostředí. Přihlásit se mohou samozřejmě i jednotlivci.

Náplň bude tvořit především pozorování a rekreace, pořadatelé ale také počítají s doplňkovým programem: přednáškami našich předních odborníků, promítáním filmů, výlety atd. Připraven je i program pro děti. Zkušenosti z minulých šesti ročníků ukázaly, že si z programu vyberou skutečně všichni starší 1 roku.

Předpokladaný maximální počet účastníků je 80. Podrobné informace a přihlášku si můžete vyžádat na adrese: Hvězdárna a planetarium hl.m. Prahy, Peřín 205, 118 46 Praha 1, telefon (02) 24 51 07 09.

Pavel Suchan